Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du
DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :
Domaine mathématiques – Mathématiques fondamentales

Présentée et soutenue par
Wahiba MESSIRDI
le : 01 Juillet 2013

Titre :
Idéaux 1-fibrés d'un anneau Nœthérien

École doctorale :
Mathématiques Informatique Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :
UMR 5219

Directeur de thèse :
Mark SPIVAKOVSKY

Rapporteurs :
Philippe GIMENEZ
Veronique VAN LIERDE

Autres membres du jury :
Denis-Charles CESINSKI
Philippe GIMENEZ
Jawad SNOUSSI
Mark SPIVAKOVSKY
Veronique VAN LIERDE

A ma très chère mère et à la mémoire de mon père,

à Raneem.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse Mark Spivakovsky pour avoir diriger cette thèse et m'avoir permis de la réaliser dans les meilleures conditions. Je tiens particulièrement à le remercier de la liberté d'action qu'il m'a donné à chaque étape de ce travail. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je suis très honoré de l'avoir eu pour encadrant, je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

Je tiens également à remercier mes deux rapporteurs de thèse, Phillipe Gimemez et Veronique Van Lierde, d'avoir accepté de rapporter ce présent manuscrit. Je leur suis reconnaissante d'avoir fait l'effort de se plonger dans mes travaux malgré leur charge de travail. Merci également aux autres membres de mon jury, Denis-Charles Cecinski et Jawad Snoussi qui m'ont fait l'honneur de faire partie de mon jury de thèse et de l'intérêt qu'ils y ont porté.

J'adresse également mes remerciements à toutes les personnes qui, de diverses façons et à différents moments m'ont apporté leur aide et leur soutien.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du laboratoire Emile Picard, et j'en remercie ici tous les membres.

J'exprime ma reconnaissance à ceux qui ont plus particulièrement assuré leur soutien sans faille, leurs encouragements et leur aide tout au long de ces années : ma chère mère, mes frères et soeurs, ma tante Rahila, ma grand mère et à toute ma famille.

Enfin, je remets d'importants remerciements à Charef malgrès qu'il est difficile de résumer en quelques mots tout ce qu'il m'as apporté, je lui dit tout simplement Milles merci pour tout.

Toulouse le 01 Juillet 2013.

Table des matières

Table des matières

Introduction

L'objectif principal de cette thèse est d'introduire la notion de la racine n-ième d'un idéal 1-fibré et d'étudier sa clôture intégrale. En général, il y a deux méthodes importantes pour étudier cette clôture intégrale. La première méthode théorique pour tester si un élément x appartient à la clôture intégrale d'un idéal est basée sur un résultat qui s'appelle *determinant trick*, et il s'annonce comme suit : un élément $x \in R$ est entier sur I si et seulement si il existe un R-module M fidèle de type fini tel que

$$xM \subseteq IM.$$

En particulier, si I est intégralement clos, alors

$$IM : M = I$$

pour tout R-module M fidèle de type fini. La deuxième méthode utilise la théorie de l'algèbre de Rees de I définie comme l'anneau gradué suivant :

$$\mathcal{R}(I) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n t^n.$$

Cette algèbre est la représentation algébrique de l'éclatement du $Spec\, R$ le long du sous schéma $V(I)$. Dans cette méthode la clôture intégrale d'un idéal I est déterminée par un ensemble fini de valuations discrètes (Cf. Théorème 1.3.8) appelées les valuations de Rees de I, définies comme suit : Une valuation ν est appelée une valuation de Rees associée à I si son anneau de valuation R_ν est la localisation de l'algèbre de Rees normalisée $\overline{\mathcal{R}(I)}$ en un idéal premier minimal de $I\overline{\mathcal{R}(I)}$.

Les idéaux 1-fibrés ont été étudiés par Hübl et Swanson [9], Sally [20], Fedder, Huneke et Hübl [7], Beddani [2] et par V. Van Lierde [23]. Dans ce qui suit on va citer les principaux résultats de ces derniers.

Rees était le premier qui a étudié systématiquement les valuations associées à un idéal ; ces valuations on été appelées plus tard valuations de Rees. Il a démontré leur existence et unicité, et le fait qu'elles décrivent les clôtures intégrales des puissances d'un idéal donné.

En 1989, Sally [20] a montré que si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local dont la completion $\mathfrak{m}$-adique est réduite (i.e, R est analytiquement non-ramifié), et qui a un idéal $\mathfrak{m}$-primaire 1-fibré, alors R est analytiquement irréductible, i.e, la completion $\mathfrak{m}$-adique de R est un anneau intègre. Plus généralement, Katz [10] a montré que si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau Nœthérien local formellement équidimensionnel, alors pour tout idéal I $\mathfrak{m}$-primaire, le nombre des valuations de Rees est minoré par le nombre d'idéaux premiers dans la completion $\mathfrak{m}$-adique de R. Ainsi si R a un idéal m-primaire 1-fibré, alors $\widehat{R}$ a seulement un idéal minimal premier.

D'autre part, Cutkosky [5] a montré qu'il existe un anneau local $(R, \mathfrak{m})$ complet et intégralement clos de dimension deux dans lequel chaque idéal $\mathfrak{m}$-primaire a au moins deux valuations de Rees.

En 1990, Fedder, Huneke et Hübl ont étendu le lien entre les idéaux 1-fibrés et les dérivations qui s'annonce comme suit : soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau intègre local complet qui contient les rationnels. Si I est un idéal 1-fibré, alors il existe une constante l, qui dépend juste de R et I, tel que si $f \in \mathfrak{m}$ et $f \notin I^n$, alors il existe une dérivation d de R dans R telle que $d(f) \notin I^{n+l}$.

En 2001, Hübl et Swanson [9] ont montré le résultat suivant : soient $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local analytiquement non-ramifié et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire 1-fibré. Alors il existe un entier b tel que pour tout x et y dans R et pour tout entier $n \geq 1$ tels que

$xy \in I^{2n+b}$, on a $x \in I^n$ ou $y \in I^n$.

En 2009, Beddani [2, Théorème 4.7] a montré que si I est un idéal d'un anneau Nœthérien vérifiant la condition (Z_2) suivante : il existe un entier $b \geqslant 0$, tel que pour tout x, y dans R, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$(Z_2) \qquad xy \in I^{2n+b} \implies x \in I^n \quad \text{ou} \quad y \in I^n,$$

alors I est un idéal 1-fibré. La réciproque est vraie dans le cas où R est analytiquement non-ramifié [2, Corollaire 4.8] et [9, Corollary 2.7].

Göhner [8] et V. Van Lierde [23] ont donné autres résultats sur les idéaux 1-fibrés dans le cadre où $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau de dimension deux à singularité rationelle tel que son corps résiduel $R/\mathfrak{m}$ est algébriquement clos.

Cette thèse est divisée en quatres chapitres :

Le premier chapitre est destiné à rappeler les notations ainsi que quelques propriétés élémentaires sur les valuations, clôture intégrale des idéaux et les valuations de Rees.

Le deuxième chapitre présente la première partie de thèse sur les propriétés des idéaux 1-fibrés. Il décrit aussi un travail (Cf. [4]), intitulé "*Some results on one-fibered ideals*" publié dans *Journal of Algebra and its Applications*. Les résultats principaux de cette partie sont :

Théorème 2.1.13. Soit R un anneau local analytiquement non-ramifié. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) R possède un idéal 1-fibré.

(2) R possède un idéal 1-fibré normal.

Théorme 2.1.17. Soit R un anneau Nœthérien intègre et I un idéal de R qui vérifie la condition (Z_2). Soit $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$, alors on a les propriétés suivantes :

(1) $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, en particulier, il est intégralement clos,

(2) La complétion $\mathfrak{p}$-adique de R est un anneau intègre,

(3) Les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique sont linéairement équivalentes.

Théorème 2.1.20. Soit I un idéal monomial de $R = k[x_1, x_2, ..., x_d]$ satisfaisant les conditions suivantes : $\forall x \in R$, $\forall y \in K(R)$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$xy \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n \quad \text{ou} \quad y \in I^n.$$

Alors I est normal.

Lemme 2.2.3. Soit $d \geqslant 1$ un entier et I un idéal qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$ (i.e. pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tels que $xy \in I^{2n}$, x ou y appartient à I^n). Alors pour tout entier $n \geqslant 1$, pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_d$ dans $\sqrt[n]{I}$ (où $\sqrt[n]{I}$ désigne l'ensemble des éléments x dans R tels que : $x^n \in I$), et pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ dans $\mathbb{N}$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = n$, on a :

$$\prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \in I.$$

Corollaire 2.2.5. Si I est un idéal qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, l'ensemble

$$\sqrt[n]{I} = \{x \in R \mid x^n \in I\}$$

est un idéal de R.

Le troisième chapitre a pour but de présenter un travail (Cf. [3]) intitulé "*On the normality of 1-fibered monomial ideals*", accepté pour publication dans "Algebra Colloquium". Ce chapitre présente la deuxième partie de mon travail sur la question suivante de Hübl et Swanson :

Question [Cf. [9], Question 2.9]. Soient R un anneau Nœthérien analytiquement irréductible (Cf. Définition 2.1.2) et I un idéal $\mathfrak{m}$-primaire de R. Supposons que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout x et y de R, on a :

$$xy \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n \quad \text{ou} \quad y \in I^n.$$

L'idéal I est-il normal ?

Les résultats principaux de ce chapitre sont :

Lemme 3.2.3. Soit I un idéal 1-fibré d'un anneau Nœthérien qui vérifie la condition (Z_2) tel que $b(I) = 0$. Alors pour tout entier positif r,

$$\sqrt[n]{I^{rn}} \quad \subseteq \quad I^{r+1} : I.$$

Théorème 3.2.7 (*Réponse à la Question de Hübl et Swanson pour les idéaux monomiaux*). Soit I un idéal monomial. Alors I est normal 1-fibré si et seulement si pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{2n}$, x ou y appartient à I^n.

Enfin, le quatrième et dernier chapitre introduit la condition C_n et les idéaux C_n-maximaux. Il présente aussi quelques résultats concernant cette condition. Ce chapitre a pour but de montrer que tout idéal qui vérifie la condition C_n est contenu dans un idéal C_n-maximal.

Chapitre

1 Préliminaires

Sommaire

Nous rappelons, dans ce chapitre, quelques éléments de la théorie des clôtures intégrales des idéaux, les définitions concernant les valuations de Rees, et ainsi le théorème de valuation de Rees .

Le lecteur pourra consulter, entre autres, les ouvrages de référence [11], [17], [19] et [22].

1.1 Rappel sur les valuations

Soit $(\Gamma, \geq)$ un groupe commutatif totalement ordonné. Nous adjoignons au groupe Γ un élément $+\infty$ et nous appelons Γ_∞ l'ensemble ainsi obtenu : $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{+\infty\}$. Nous munissons cet ensemble d'une relation d'ordre total en posant :

$$\forall \alpha \in \Gamma : \alpha \leq +\infty,$$

$$\infty + \alpha = \alpha + \infty = \infty$$

et

$$\infty + \infty = \infty.$$

1.1.1 Pseudo-valuations

Définition 1.1.1. *Soit R un anneau. Nous appelons pseudo-valuation de R à valeurs dans Γ toute application $v : R \longrightarrow \Gamma_\infty$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

1. $v(0) = \infty$ *et* $v(1) = 0$
2. $\forall (x, y) \in R \times R, v(x + y) \geq \inf(v(x), v(y))$.
3. $\forall (x, y) \in R \times R, v(xy) \geq v(x) + v(y)$.

Exemple 1.1.2. Soient R un anneau Nœthérien et I un idéal de R. Nous définissons la fonction v_I de la manière suivante : Pour tout x appartenant à R

$$v_I(x) = \begin{cases} s & \text{si } x \in I^s - I^{s+1}, \\ \infty & \text{si } \forall s \in \mathbb{N}, \quad \text{on a :} \quad x \in I^s \end{cases}$$

Cette fonction est une pseudo-valuation qu'on l'appelle l'ordre I-adique.

Proposition 1.1.3. *Soit R un anneau et v une pseudo-valuation de R à valeurs dans Γ. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(H_1) $\forall x \in R, v(x^2) = 2v(x)$

(H_2) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in R, v(x^n) = nv(x)$.

Démonstration. L'implication $(H_2) \Longrightarrow (H_1)$ est triviale. Supposons que pour tout x appartenant à R, on a $\nu(x^2) = 2\nu(x)$. Soit n un entier naturel, d'après la condition 3) de la définition d'une pseudo-valuation, on obtient $\nu(x^n) \geq n\nu(x)$. Soit k un entier naturel tel que $n < 2^k$. Alors la condition (H_1) donne

$$\nu(x^{2^k}) = 2^k \nu(x).$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\nu(x^{2^k}) &= \nu(x^{2^k - n} x^n) \\ &\geq \nu(x^{2^k - n}) + \nu(x^n) \\ &\geq (2^k - n)\nu(x) + \nu(x^n).\end{aligned}$$

Ce qui donne $\nu(x^n) \leq n\nu(x) + \nu(x^{2^k}) - 2^k\nu(x) = n\nu(x)$. Donc pour tout nombre naturel $n \geq 1$, on a $\nu(x^n) = n\nu(x)$. □

Définition 1.1.4. *Une pseudo-valuation qui vérifie l'une des deux conditions précédentes (H_1 ou H_2) est appelée homogène .*

Définition 1.1.5. *Si $\Gamma = \mathbb{R}$ le groupe de réels, une pseudo-valuation (resp. une pseudo-valuation homogène) sera appelée également une fonction d'ordre (resp. une fonction d'ordre homogène). Par exemple pour tout idéal I d'un anneau R, ν_I est une fonction d'ordre que nous appelons l'ordre I-adique .*

Théorème 1.1.6 (Cf. [21])**.** *Soit ν une fonction d'ordre sur un anneau R. Alors il existe une fonction d'ordre homogène $\overline{\nu}$ sur R , qui est la plus petite fonction d'ordre homogène et plus grande ou égale à ν, telle que pour tout $x \in R$,*

$$\overline{\nu}(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\nu(x^n)}{n}.$$

Cette limite appartient à $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \infty$.

Définition 1.1.7. *Si $\nu = \nu_I$, la fonction*

$$\overline{\nu}_I(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\nu_I(x^n)}{n}.$$

sera appelée l'ordre I-adique réduit .

1.1.2 Anneaux de valuations

Soient $(R_1, \mathfrak{m}_1)$ et $(R_2, \mathfrak{m}_2)$ deux anneaux locaux. On dit que R_2 domine R_1 si $R_1 \subset R_2$ et $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 \cap R_1$. La relation "$R_2$ domine R_1" est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des anneaux locaux. Si $(R_2, \mathfrak{m}_2)$ domine $(R_1, \mathfrak{m}_1)$ alors l'inclusion $R_1 \subset R_2$ et l'égalité $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 \cap R_1$ définit une injection du corps résiduel $k(\mathfrak{m}_1)$ de R_1 dans le corps résiduel $k(\mathfrak{m}_2)$ de R_2.

Définition 1.1.8. *Soit $(V, \mathfrak{m}_V)$ un anneau intègre local et K son corps de fractions. L'anneau V est dit anneau de valuation de K si V est un élément maximal de l'ensemble des sous-anneaux locaux de K ordonné par la relation de domination. Autrement dit, si W est un sous-anneau local de K qui domine V, alors $W = V$.*

Théorème 1.1.9 (Cf. [1, 12, 24]). *Soient R_1 et R_2 deux anneaux avec $R_1 \subseteq R_2$ et R_2 entier sur R_1. Alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R_1 il existe un idéal premier $\mathfrak{q}$ de R_2 tel que $\mathfrak{q} \cap R_1 = \mathfrak{p}$.*

Théorème 1.1.10 (Cf. [1, 12, 24, 25]). *Soit V un anneau intègre contenu dans un corps K. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *V est un anneau de valuation de K.*
2. *Pour tout $x \in K$, si x n'appartient pas à V, alors son inverse x^{-1} appartient à V.*
3. *K est le corps de fractions de V et l'ensemble des idéaux de V est totalement ordonné par la relation d'inclusion.*

Exemple 1.1.11. Soit X un schéma normal. Pour tout sous-schéma fermé intègre E de X de codimension 1, l'anneau $\mathcal{O}_{X,E}$ est un anneau de valuation de $K(X)$. En particulier si R est un anneau normal, alors pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de R de hauteur 1, l'anneau $R_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation de $K(R)$.

Définition 1.1.12. *Soit R un anneau, nous appelons valuation de R à valeurs dans Γ, toute pseudo-valuation ν de R à valeurs dans Γ telle que pour tout x et y de R,*

$$\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y).$$

Remarque 1.1.13. Si R est intègre et K son corps de fractions, alors l'extension de ν à K définie par

$$\forall x \in R, \forall y \in R - \{0\} \quad : \quad \nu(x/y) = \nu(x) - \nu(y)$$

est une valuation de K à valeurs dans Γ.

Définition 1.1.14. *Une valuation à valeurs dans Γ est dite discrète si $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.*

Exemple 1.1.15. Soient k un corps, $R = k(X, Y)$ le corps des fonctions rationnelles de $k[X, Y]$, et

$$\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\pi = \{n + m\pi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

L'application ν de $K(X, Y) \setminus \{0\}$ dans Γ définie par

$$\forall f = \sum C_{\alpha\beta} X^{\alpha} Y^{\beta} \in k(X, Y) \quad : \quad \nu(f) = \min\{\alpha + \pi\beta \mid C_{\alpha\beta} \neq 0\}$$

est une valuation à valeurs dans Γ. Cette valuation est uniquement déterminée par la donnée de $\nu(X)$ et de $\nu(Y)$ parce que $\nu(X)$ et $\nu(Y)$ sont $\mathbb{Q}$-linéairement indépendantes.

Proposition 1.1.16 (Cf. [24]). *Soit ν une valuation d'un corps K à valeurs dans un groupe Γ. Alors l'ensemble des éléments $x \in K$ vérifiant $\nu(x) \geq 0$ est un anneau de valuation dont l'idéal maximal est l'ensemble des éléments $x \in K$ vérifiant $\nu(x) > 0$. Réciproquement, si V est un anneau de valuation de K, on peut lui associer une valuation ν de K dans un groupe Γ_V telle que $V = \nu^{-1}(\Gamma_V^+)$.*

Notation 1.1.17. Soit R un anneau intègre et ν une valuation discrète d'un corps de fractions K de R. On note

$$I_n(\nu) = \{x \in R \mid \nu(x) \geqslant n\},$$

et

$$R_\nu = \{x \in K \mid \nu(x) \geqslant 0\}.$$

En particulier, l'idéal premier $I_1(\nu)$ sera dit le centre de valuation ν dans R. Si R est Nœtherien et I est un idéal de R, on note

$$\nu(I) = \min_{x \in I}\{\nu(x)\}.$$

1.2 Clôture intégrale d'un idéal

Dans toute cette section, R est un anneau commutatif, unitaire et I un idéal propre.

Définition 1.2.1. *Un élément $x \in R$ sera dit entier sur I s'il existe un entier positif n et des éléments $a_i \in I^i$, $i = 1, ..., n$, tels que*

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

Une telle équation est appelée une équation de dépendance intégrale de x sur I. L'ensemble de tous les éléments entiers sur I est appelé clôture intégrale de I, et on le note par $\bar{I}$. On a clairement

$$I \subseteq \bar{I} \subseteq \sqrt{I}$$

Lemme 1.2.2 ([11])**.** *Soit $R[T]$ l'anneau de polyômes à une indéterminée T sur R. On note $\mathcal{R}(I)$ le sous-anneau $\oplus I^n T^n$ de $R[T]$. L'élément $x \in R$ est entier sur I si et seulement si xT est entier sur l'anneau $\mathcal{R}(I)$.*

Démonstration. Soit

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

$a_i \in I^i$, une relation de dépendance intégrale de x sur I. Multiplions cette équation par T^n, on obtient

$$(xT)^n = a_1 T (xT)^{n-1} + \cdots + a_n T^n.$$

Ceci signifie que xT appartient à la clôture intégrale de l'anneau $\mathcal{R}(I)$ dans $R[T]$. Réciproquement, soit

$$(xT)^n = b_1 (xT)^{n-1} + \cdots + b_n \tag{1.2.1}$$

avec $b_i \in \mathcal{R}(I)$ une relation de dépendance intégrale de xT sur $\mathcal{R}(I)$. Ecrivons les b_i sous la forme

$$b_i = \sum_{j=0}^{i_k} c_{ij} T^j$$

où $c_{ij} \in I^j$. Le coefficient de T^n dans le polynôme $b_1(xT)^{n-1} + \cdots + b_n$ est $c_{11}x^{n-1} + c_{22}x^{n-2} + \cdots + c_{nn}$. Donc d'après l'équation (1.2.1), on obtient

$$x^n = c_{11} x^{n-1} + \cdots + c_{nn},$$

avec $c_{ii} \in I^i$. Ceci entraîne que $x \in \overline{I}$. □

Corollaire 1.2.3. *La clôture intégrale d'un idéal est un idéal.*

Démonstration. Il suffit de voir que si x et y sont entiers sur I, $x + y$ l'est aussi. Or la clôture intégrale de $\mathcal{R}(I)$ dans $R[T]$ est un sous anneau de $R[T]$. □

Définition 1.2.4. *Si $\overline{I} = I$, on dit que I est un idéal intégralement clos , et si I est un idéal tel que, pour tout entier positif n, I^n est intégralement clos, alors I est appelé normal .*

Proposition 1.2.5 ([22]). *1. Les idéaux radicaux sont intégralement clos.*

2. *L'intersection des idéaux intégralement clos est un idéal intégralement clos.*

3. *Si* $\psi : R \longrightarrow S$ *est un morphisme d'anneaux, alors* $\psi(\overline{I}) \subseteq \overline{\psi(I)S}$.

4. *Pour tout système multiplicatif* T *de* R *on a,* $T^{-1}\overline{I} = \overline{T^{-1}I}$.

5. $\overline{\overline{I}} = \overline{I}$.

6. $\sqrt{\overline{I}} = \sqrt{I}$.

Proposition 1.2.6 ([11], Proposition 1.9)**.** *Soit* I *un idéal d'un anneau* R*. Un élément* x *est entier sur* I*, si et seulement s'il existe un* R*-module de type fini* M *tel que :*

1. $xM \subseteq IM$,

2. *Si* $aM = 0$*, il existe* $k \geq 0$*, tel que* $ax^k = 0$.

1.3 Valuations de Rees

Dans cette section, nous donnons la définition d'une valuation de Rees associée à un idéal I d'un anneau R Nœthérien intègre. Pour plus de détails sur ce type de valuation, nous envoyons le lecteur à [16, 17, 22].

Définition 1.3.1. *Un anneau intègre* R *est appelé domaine de Krull, s'il vérifie les conditions suivantes :*

1. *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* R *de hauteur 1,* $R_{\mathfrak{p}}$ *est un anneau de valuation principal*

2. *Tout idéal principal* $(a) \neq (0)$ *de* R *est une intersection finie des idéaux primaires de hauteur 1.*

Remarque 1.3.2. Soit R un domaine de Krull et x un élément non-nul de R. Ecrivons $xR = \cap_{i=1}^{s} Q_i$, où les Q_i sont des idéaux primaires d'hauteur 1. Soit $P_i = \sqrt{Q_i}$. Alors $\sqrt{xR} = \cap_{i=1}^{s} P_i$. Ceci implique que tout idéal premier d'auteur 1 qui contient x est l'un des P_i ; en particulier, l'ensemble d'idéaux premiers d'auteur 1 qui contiennent x est fini.

Lemme 1.3.3 ([22], Proposition 4.10.3)**.** *Soient R un domaine de Krull et $x \neq 0$ un élément de R. Soient $P_1, \ldots, P_s$ les idéaux premiers de R tels que pour tout $i = 1, 2, ..., s$, $x \in P_i$ et* $\operatorname{ht} P_i = 1$. *Alors*

$$xR = \bigcap_{i=1}^{s} (xR_{P_i} \cap R)$$

est une décomposition primaire minimale de xR.

Notation 1.3.4. Si $A = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A_i$ est un anneau gradué et $\mathfrak{p}$ un idéal premier homogène de A, nous notons

$$A_{(\mathfrak{p})} = \{x \in A_{\mathfrak{p}} \quad \text{tel que } \deg x = 0\}.$$

Pour tout entier n inférieur ou égal à zéro, nous adoptons la convention $I^n = R$. L'anneau gradué

$$\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^n t^n = R \oplus It \oplus I^2 t^2 \oplus ... \oplus I^n t^n \oplus ...$$

est appelé algèbre de Rees associée à l'idéal I, on la note $B(I)$. En général pour tout idéal I d'un anneau R et pour tout R-module M, nous définissons les trois R-modules $G(I, M)$, $B(I, M)$ et $R(I, M)$ par :

$$G(I, M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} I^n M / I^{n+1} M,$$

$$B(I, M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I^n M) t^n,$$

et

$$R(I, M) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} (I^n M) t^n.$$

Dans le cas où $M = R$, nous utilisons les notations $G(I)$, $B(I)$ et $R(I)$ au lieu de $G(I, R)$, $B(I, R)$ et $R(I, R)$.

Remarque 1.3.5. Nous pouvons voir les R-modules $B(I, M)$ et $R(I, M)$ comme des sous-groupes de

$$M[t, u] = M \otimes_R R[t, u]$$

où $u = t^{-1}$, et nous avons :

$$R(I) = B(I)[u],$$

$$G(I) \simeq B(I)/IB(I) \simeq R(I)/uR(I)$$

et

$$\forall n \geq 0 : I^n = u^n R(I) \cap R.$$

Soient R un anneau Nœthérien intègre et K son corps de fractions, et soit I un idéal propre de R. Notons :

$$S(I) = \overline{R(I)}$$

la normalisation de l'anneau $R(I)$. D'après le théorème de Mori-Nagata (Cf. [15], Théorème 33.10), $S(I)$ est un anneau de Krull. Soit

$$IS(I) = uS(I) = Q_1 \cap Q_2 ... \cap Q_s$$

une décomposition primaire de $IS(I)$ (voir Lemme 1.3.3). Posons pour tout $i = 1, 2, ..., s$:

$$\mathfrak{p}_i = \sqrt{Q_i}.$$

Comme l'idéal $uS(I)$ est principal, ses idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 ..., \mathfrak{p}_s$ sont de hauteur 1. Par conséquent, les anneaux

$$S(I)_{(\mathfrak{p}_1)}, S(I)_{(\mathfrak{p}_2)}, ..., S(I)_{(\mathfrak{p}_s)}$$

sont des anneaux de valuation discrète. Leurs intersections $S(I)_{(\mathfrak{p}_1)}, S(I)_{(\mathfrak{p}_2)}, ..., S(I)_{(\mathfrak{p}_s)}$ avec le corps K, vu comme la partie de degré zéro du corps des fractions de $S(I)$, sont aussi des anneaux de valuation, différentes du corps K lui-même. Puisque ces valuations de K ne sont pas triviales, ce sont forcement des valuations discrètes. Pour tout $i = 1, 2, \cdots, s$, soit ν_i la valuation associée à $S(I)_{(\mathfrak{p}_i)}$.

Définition 1.3.6. *Les valuations $\nu_1, ..., \nu_s$ sont appelées les valuations de Rees associées à l'idéal I.*

Remarque 1.3.7. On peut construire géométriquement les valuations de Rees par la manière suivante : Soient R un anneau Nœthérien intègre et I un idéal de R. Posons $X = \text{Spec } R$ et

$$\pi_I : Y = \text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} \overline{I^n} t^n \longrightarrow X$$

l'éclatement normalisé de R le long de I, et $E = V(I\mathcal{O}_Y)$ le diviseur exceptionnel de cet éclatement. Ici, Y n'est pas nécessairement Nœthérien et par définition de l'éclatement on peut trouver un recouvrement fini de Y par des ouverts affines de la forme $SpecB$, où B est un anneau de Krull. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_r$ les composantes irréductibles de E. Sachant que le faisceau $I\mathcal{O}_Y$ est localement principal, alors les anneaux $\mathcal{O}_{Y,E_1}, \mathcal{O}_{Y,E_2}, \cdots, \mathcal{O}_{Y,E_r}$ sont des anneaux de dimension égale à 1, et comme Y est un schéma normal, ses anneaux sont des anneaux de valuation. Pour tout indice i, on pose ν_i la valuation associée à l'anneau $\mathcal{O}_{Y,E_i}$. L'ensemble $T(I) = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r\}$ s'appelle l'ensemble de valuations de Rees associées à l'idéal I.

Nous rappelons ici le Théorème de Valuation de Rees dont nous aurons besoin pour présenter nos travaux aux Chapitres 2 et 3.

Théorème 1.3.8 ([16]). *Soient R un anneau Nœthérien, I un idéal de R et $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_s$ les valuations de Rees associées à I. Alors pour tout $x \in R$,*

$$\overline{\nu}_I(x) = \min_i \frac{\nu_i(x)}{\nu_i(I)}$$

et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\overline{I^n} = \{x \in R \mid \overline{\nu}_I(x) \geq n\}.$$

1.4 Topologies définies par des filtrations

Soit G un groupe abélien filtré par des sous groupes $(H_n)_n$, c'est-à-dire :

$$H_{n+1} \subset H_n \quad \text{et} \quad \bigcup_n H_n = G.$$

Notons : $H = (H_n)_n$ à cette filtration. On peut définir une topologie sur G en prenant les H_n comme système fondamental de voisinages de 0 dans G. Un sous-ensemble N de G est ouvert si pour tout $x \in N$, il existe n, tel que $x + H_n \subset N$. Pour que G soit séparé il faut et il suffit que

$$\bigcap_n H_n = 0.$$

1.4.1 Topologie I-adique, ν-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique

Définition 1.4.1. *Soit R un anneau, I un idéal de R. On appelle topologie I-adique l'unique topologie sur R définie par la filtration I^n, $n \geq 0$. En particulier, un système fondamental de voisinages de $a \in R$ est l'ensemble des $a + I^n, n \geq 0$.*

Proposition 1.4.2. *Si ν est une valuation d'un anneau R à valeurs dans $\mathbb{Z}^+$, alors pour tout nombre naturel n, l'ensemble $I_n(\nu)$ est un idéal de R. De plus, pour tout nombre naturel $n \geqslant 0$, $I_{n+1}(\nu) \subset I_n(\nu)$, où*

$$I_n(\nu) = \{x \in R \quad | \quad \nu(x) \geqslant n\}.$$

Démonstration. Soit n un nombre naturel. Il est clair que $0 \in I_n(\nu)$. Prenons x, y deux éléments de $I_n(\nu)$, donc $\nu(x) \geqslant n$ et $\nu(y) \geqslant n$, par suite

$$\nu(x - y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y)) \geqslant n,$$

ce qui donne $x - y \in I_n(\nu)$.
D'une autre part, soit $a \in R$ et $x \in I_n(\nu)$, donc $\nu(ax) = \nu(a) + \nu(x)$. Comme $\nu(x) \geqslant n$ par définition de $I_n(\nu)$ et $\nu(a) \geqslant 0$, alors $\nu(x) + \nu(a) \geqslant n$, ce qui signifie que $\nu(ax) \in I_n(\nu)$.

L'inclusion $I_{n+1}(\nu) \subset I_n(\nu)$ est triviale. □

On déduit que pour toute valuation ν sur un anneau R à valeurs dans $\mathbb{Z}$, le recouvrement $(I_n(\nu))_n$ définit une filtration. La topologie induite par cette filtration s'appelle la topologie ν-adique.

Définition 1.4.3. *Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier d'un anneau R et $n \geqslant 0$ un entier. L'idéal $\mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R$ est appelé la puissance n-symbolique de $\mathfrak{p}$; on la note par*

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \mathfrak{p}^n R_{\mathfrak{p}} \cap R.$$

La topologie induite par la filtration $(\mathfrak{p}^{(n)})_n$ s'appelle la topologie $\mathfrak{p}$-symbolique.

1.4.2 Comparaison linéaire des topologies adiques

Dans cette section, nous considérons G un groupe abélien filtré par des sous groupes H_n et K_n c'est-à-dire :

$$H_{n+1} \subset H_n \quad \text{et} \quad \bigcup_n H_n = G,$$

et

$$K_{n+1} \subset K_n \quad \text{et} \quad \bigcup_n K_n = G.$$

Définition 1.4.4. *On dit que la topologie H-adique est linéairement plus fine que la topologie K-adique si et seulement si, il existe une fonction affine ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$ on a : $H_{\phi(n)} \subset K_n$.*

Définition 1.4.5. *On dit que les topologies H-adique et K-adique sont linéairement équivatentes si et seulement s'il existe deux fonctions affines ϕ, ψ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout $n \geqslant 0$ on a : $H_{\phi(n)} \subset K_n \quad \text{et} \quad K_{\psi(n)} \subset H_n$.*

Ici, nous remarquons que la relation : linéairement équivalentes sur l'ensemble des topologies adiques est une relation d'équivalence.

Exemple 1.4.6. Soit I un idéal d'un anneau R.

1. Pour s, r deux nombres naturels quelconques les topologies I^s-adique et I^r-adique sont linéairement équivalentes. Posons $H_n = I^{sn}$ et $K_n = I^{rn}$. Pour montrer l'équivalence linéaire il suffit de prendre $\phi(n) = rn$ et $\psi(n) = sn$.

2. Si l'anneau R est Nœthérien, alors les topologies I-adique et $\sqrt{I}$-adique sont linéairement équivalentes. En sachant que $I \subset \sqrt{I}$, on obtient que la topologie I-adique est linéairement plus fine que $\sqrt{I}$-adique. Réciproquement, si $\sqrt{I} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, alors pour tout i, il existe l_i tel que $x_i^{l_i} \in I$. Soit $l = \max(l_1, l_2, ..., l_d)$, on a donc $(\sqrt{I})^l \subset I$, ce qui montre que la topologie $\sqrt{I}$-adique est linéairement plus fine que la topologie I-adique.

Proposition 1.4.7. *Soient ν_1 et ν_2 deux valuations d'un anneau R à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe une constante $C \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in R$ on a :*

$$\nu_1(x) \leqslant C\nu_2(x) \quad \text{et} \quad \nu_2(x) \leqslant C\nu_1(x).$$

Alors les topologies ν_1-adique et ν_2-adique sont linéairement équivalentes.

Démonstration. Posons $H_n = I_n(\nu_1)$ et $K_n = I_n(\nu_2)$ et prenons

$$\phi(n) = \psi(n) = Cn,$$

on a clairement $H_{\phi(n)} \subset K_n \quad et \quad K_{\psi(n)} \subset H_n$. Par suite, les topologies ν_1-adique et ν_2-adique sont linéairement équivalentes. □

Chapitre

2

Quelques résultats concernant les idéaux 1-fibrés

Sommaire

Le but de ce chapitre est de prouver quelques résultats sur les idéaux 1-fibrés (i.e. idéaux avec une seule valuation de Rees). On introduit et on étudie la notion de la racine n'ième d'un idéal et on présente quelques propriétés importantes liées à sa clôture intégrale en utilisant le critère des idéaux 1-fibrés d'Hübl et Swanson.

2.1 Idéaux 1-fibrés

Dans cette partie, nous allons prouver quelques résultats sur les idéaux 1-fibrés d'un anneau Nœthérien définis comme suit :

Définition 2.1.1. *Dans un anneau Nœthérien on appelle idéal 1-fibré tout idéal qui a une seule valuation de Rees.*

Définition 2.1.2. *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre. Nous disons que l'anneau R est analytiquement non-ramifié (resp. analytiquement irréductible) si le complété $\mathfrak{m}$-adique de R est réduit (resp. intègre).*

Par [2, Théorème 4.7], on sait que si I est un idéal d'un anneau Nœthérien qui vérifie la condition (Z_2) suivante : il existe un entier $b \geqslant 0$, tel que pour tout x, y dans R, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$xy \in I^{2n+b} \quad \Longrightarrow \quad x \in I^n \quad \text{ou} \quad y \in I^n, \tag{2.1.1}$$

alors I est un idéal 1-fibré. La réciproque est vraie dans le cas où R est analytiquement non-ramifié [2, Corollaire 4.8] et [9, Corollary 2.7].

Si I est un idéal d'un anneau Nœthérien qui vérifie la condition (Z_2), on note par $b(I)$ le plus petit entier naturel b pour lequel la condition (Z_2) se réalise. Il est clair que l'idéal $I = (0)$ d'un anneau intègre est 1-fibré avec $b(I) = 0$. Géométriquement ([2]. Théorème 4.7), un idéal I d'un anneau Nœthérien intègre R satisfait la condition (Z_2) si et seulement si le diviseur exceptionnel réduit E_I de l'éclatement normalisé de $Spec\, R$ le long de $V(I)$ est irréductible.

Exemple 2.1.3. Soit R un anneau de valuation discrète et I un idéal de R. Alors I est principal. Soit $I = (x)$, soient a, b deux éléments de R et $n \geqslant 1$ un entier tel que $ab \in I^{2n}$. Alors il existe $c \in R$, tel que

$$ab = cx^{2n}.$$

On suppose que $a \notin I^n$. Comme l'ensemble des idéaux d'un anneau de valuation est totalement ordonné par inclusion, on obtient que $I^n \subseteq (a)$. Alors il existe $d \in R$ tel que $x^n = da$. Par conséquence,

$$ab = cd^2a^2,$$

alors

$$b = cd(da) = cdx^n \in I^n.$$

Cet exemple montre que tout idéal I d'un anneau de valuations discrète est 1-fibré avec $b(I) = 0$.

Lemme 2.1.4 ([9], Corollaire 2.7)**.** *Si I est un idéal normal 1-fibré d'un anneau Noetherien R, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout x, y dans R tels que $xy \in I^{2n}$, on a $x \in I^n$ ou $y \in I^n$.*

Proposition 2.1.5 (Cf. [7, 20])**.** *Soit I un idéal d'un anneau Nœtherien. Alors I est 1-fibré si et seulement si, la fonction $\overline{v}_I$ est une valuation.*

Lemme 2.1.6. *Si I est un idéal d'un anneau Nœtherien qui vérifie la condition (Z_2), alors pour tout entier $k \geqslant 1$, I^k est un idéal 1-fibré également et $b(I^k) \leqslant \lceil b(I)/k \rceil$, où $\lceil b(I)/k \rceil$ est le plus petit entier supérieur ou égal à $b(I)/k$. On a les propriétés suivantes :*

(1) si $b(I) = 0$, alors pour tout entier k, $b(I^k) = 0$,

(2) pour tout entier $k \geqslant b(I)$, $b(I^k) \leqslant 1$,

(3) la suite $b(I^{2^k})_k$ est décroissante,

(4) si I est normal, alors $b(I) = 0$.

Démonstration. Soit I un idéal 1-fibré et k un entier positif. Dans la première partie, nous allons prouver que I^k est un idéal 1-fibré. Notons $s = \lceil b(I)/k \rceil$. Pour tout

$x, y \in R$, on a :

$$\begin{aligned} xy \in (I^k)^{(2n+s)} &\implies xy \in I^{2kn+ks} \\ &\implies xy \in I^{2kn+b(I)} \\ &\implies x \in I^{kn} \quad \text{ou} \quad y \in I^{kn}. \end{aligned}$$

Cela montre que I^k est un idéal 1-fibré avec

$$b(I^k) \leqslant \lceil b(I)/k \rceil.$$

Les propriétés (1) et (2) découlent directement de l'inégalité précédente. Maintenant nous allons montrer que $b(I^2) \leqslant b(I)$. Comme I est 1-fibré, on a :

$$\begin{aligned} xy \in (I^2)^{(2n+b(I))} &\implies xy \in I^{4n+2b(I)} \\ &\implies xy \in I^{2(2n)+b(I)} \\ &\implies x \in I^{2n} \quad \text{ou} \quad y \in I^{2n}. \end{aligned}$$

D'où

$$b(I^2) \leqslant b(I).$$

En utilisant le même argument, on obtient, pour tout entier positif k

$$b(I^{2^{k+1}}) \leqslant b(I^{2^k}).$$

Si I est normal, alors par le Lemme 2.1.4, on obtient $b(I) = 0$. □

Lemme 2.1.7 (Cf. [2], Lemme 4.4). *Si I est un idéal d'un anneau Nœtherien qui vérifie la condition (Z_2), alors pour tout entier positif n,*

$$\overline{I^{n+b(I)+1}} \subset I^n.$$

Lemme 2.1.8 (Cf. [18]). *Soit R un anneau local analytiquement non-ramifié et I un idéal de R. Alors il existe un entier r, tel que pour tout entier $n \geqslant r$,*

$$\overline{I^n} \subset I^{n-r}.$$

Notation 2.1.9. Soit I un idéal d'un anneau Nœthérien R. Si I est un idéal qui vérifie la condition (Z_2) où R est un anneau local analytiquement non-ramifié , notons par $r(I)$ le plus petit entier positif r tel que,

$$\overline{I^{n+r}} \subseteq I^n \quad \text{pour tout entier positif} \quad n.$$

Proposition 2.1.10. *Soit R un anneau local analytiquement non-ramifié et I un idéal 1-fibré de R. On a les propriétés suivantes :*

(1) $r(I) - 1 \leqslant b(I) \leqslant 2r(I)$.

(2) Si I est normal, alors $r(I) = b(I) = 0$.

(3) Si $b(I) \neq 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $\left(\overline{I^{n+b(I)}}\right)^2 \subseteq I^{2n}$.

Démonstration. (1) Par la définition de $r(I)$, le lemme (2.1.7) montre que

$$r(I) - 1 \leqslant b(I).$$

Soient x et y deux éléments de R. On a

$$\begin{aligned} xy \in I^{2n+2r(I)} &\Longrightarrow \overline{v}_I(xy) \geqslant 2n + 2r(I) \\ &\Longrightarrow \overline{v}_I(x) + \overline{v}_I(y) \geqslant 2n + 2r(I) \\ &\Longrightarrow \overline{v}_I(x) \geqslant n + r(I) \quad \text{ou} \quad \overline{v}_I(y) \geqslant n + r(I) \\ &\Longrightarrow x \in \overline{I^{n+r(I)}} \quad \text{ou} \quad y \in \overline{I^{n+r(I)}} \\ &\Longrightarrow x \in I^n \quad \text{ou} \quad y \in I^n. \end{aligned}$$

Par la définition de $b(I)$, il s'ensuit que $b(I) \leqslant 2r(I)$. Si I est normal, on obtient d'après le Lemme 2.1.6.(4), que $b(I) = 0$.

(3) On suppose que $b(I) \neq 0$. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et soient $x, y \in R$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \overline{I^{n+b(I)}} \quad \text{et} \quad y \in \overline{I^{n+b(I)}} &\Longrightarrow \overline{v}_I(xy) \geqslant 2n + 2b(I) \\ &\Longrightarrow xy \in \overline{I^{2n+2b(I)}} \subseteq \overline{I^{2n+b(I)+1}} \\ &\Longrightarrow xy \in I^{2n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\left(\overline{I^{n+b(I)}}\right)^2 \subseteq I^{2n}$. □

Lemme 2.1.11. *Soient R un anneau Nœthérien intègre et I un idéal de R. Alors $\overline{v}_I = \overline{v}_{\overline{I}}$.*

Démonstration. On a évidemment l'inégalité $\overline{v}_I \leq \overline{v}_{\overline{I}}$, parce que $I \subseteq \overline{I}$. Alors, il suffit de montrer que $\overline{v}_{\overline{I}} \leq \overline{v}_I$, et pour cela, nous allons utiliser les idées mentionnées dans la démonstration du [17, Lemma 2.2]. Soit x un élément de R et $\alpha = \nu_{\overline{I}}(x)$. Prenons $\beta < \alpha$, donc il existe un nombre naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on a $x^n \in (\overline{I})^{[n\beta]}$. Sachant que $(\overline{I})^k \subset \overline{I^k}$, on trouve que $\forall n \geq n_0$, on a $x^n \in \overline{I^{[n\beta]}}$, c'est-à-dire que $y = x^n$ est une racine d'une équation de la forme

$$y^s = a_1 y^{s-1} + ... + a_s \quad \text{où} \quad a_k \in I^{k[n\beta]}.$$

A partir de cette équation on peut montrer par récurrence sur m que pour tout $m \geq s$ nous avons $y^m \in I^{[n\beta](m-s)}$, ce qui donne

$$\bar{v}_I(x) = \frac{1}{n}\bar{v}_I(y) \geq \frac{1}{n} \lim_{m\to\infty} \frac{[n\beta](m-s)}{m} = \frac{[n\beta]}{n}.$$

Passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $\overline{v}_I(x) \geq \beta$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $\beta < \overline{v}_{\overline{I}}(x)$, on en déduit que $\overline{v}_{\overline{I}}(x) \leq \overline{v}_I(x)$, et par conséquent $\overline{v}_{\overline{I}} = \overline{v}_I$. □

Proposition 2.1.12. *Soit R un anneau local analytiquement non-ramifié et I un idéal 1-fibré de R. Alors $\overline{I}$ est aussi un idéal 1-fibré de R. Nous avons*

$$b(\overline{I}) \leqslant 2b(I) + 1 \quad \textit{et} \quad r(\overline{I}) \leqslant r(I).$$

Démonstration. Supposons que I est un idéal 1-fibré. Soit n un entier positif et x, y

deux éléments de R. On a

$$\begin{aligned}
xy \in (\overline{I})^{2n+2b(I)+1} &\implies xy \in \overline{I^{2n+2b(I)+1}} \\
&\implies xy \in I^{2n+b(I)} \\
&\implies x \in I^n \quad \text{ou} \quad y \in I^n \\
&\implies x \in (\overline{I})^n \quad \text{ou} \quad y \in (\overline{I})^n.
\end{aligned}$$

En conséquence, $\overline{I}$ est un idéal 1-fibré et $b(\overline{I}) \leqslant 2b(I) + 1$. Soit z un élément de R. On a

$$\begin{aligned}
z \in \overline{(\overline{I}\,)^{r(I)+n}} &\implies \overline{v}_{\overline{I}}(z) \geqslant r(I) + n \\
&\implies \overline{v}_I(z) \geqslant r(I) + n \quad \text{(voir le lemme 2.1.11)} \\
&\implies z \in \overline{I^{r(I)+n}} \subseteq I^n \subseteq (\overline{I})^n.
\end{aligned}$$

Cela montre la deuxième inégalité $r(\overline{I}) \leqslant r(I)$. □

Théorème 2.1.13. *Soit R un anneau local analytiquement non-ramifié. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) R possède un idéal 1-fibré.

(2) R possède un idéal 1-fibré normal.

Démonstration. (2) $\implies$ (1) est triviale. Inversement, on suppose que R a un idéal 1-fibré, on le note par I. Donc I vérifie la condition (Z_2). Utilisons le lemme 2.1.7, on a :

$$\overline{I^{n+b(I)+1}} \subseteq I^n \quad \text{pour tout entier positif } n. \tag{2.1.2}$$

Considérons

$$R(I) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} I^n T^n \quad \text{et} \quad S(I) = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} \overline{I^n} T^n.$$

L'inclusion (2.1.2) montre que l'algèbre de Rees $S(I)$ est un $R(I)$-module de type fini. Par conséquent en utilisant ([22]. Proposition 5.2.5), il existe un entier positif s tel que pour tout entier $n \geqslant s$,

$$\overline{I^n} = I^{n-s}\overline{I^s}.$$

Alors pour tout $n \geqslant 1$,

$$(\overline{I^s})^n \subseteq \overline{I^{sn}} = I^{sn-s}\overline{I^s} \subseteq (\overline{I^s})^n.$$

Ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1$,

$$(\overline{I^s})^n = \overline{I^{sn}}.$$

Considérons $J = \overline{I^s}$, il est clair que J est normal. Pour finir la preuve, il reste à montrer que J est un idéal 1-fibré. Soient x, y deux éléments de R. Par le théorème de valuation de Rees, on déduit :

$$\begin{aligned}
xy \in (\overline{I^s})^{2n} &\Longrightarrow xy \in \overline{I^{2sn}} \\
&\Longrightarrow \overline{v}_I(xy) \geqslant 2sn \\
&\Longrightarrow \overline{v}_I(x) + \overline{v}_I(y) \geqslant 2sn \\
&\Longrightarrow \overline{v}_I(x) \geqslant sn \quad \text{ou} \quad \overline{v}_I(y) \geqslant sn \\
&\Longrightarrow x \in \overline{I^{sn}} \quad \text{ou} \quad y \in \overline{I^{sn}} \\
&\Longrightarrow x \in (\overline{I^s})^n \quad \text{ou} \quad y \in (\overline{I^s})^n.
\end{aligned}$$

D'où $\overline{I^s}$ est un idéal 1-fibré et $b(\overline{I^s}) = 0$. □

Définition 2.1.14. *Soient R un anneau Nœtherian intègre et ν_1, ν_2 deux valuations discrètes du corps de fraction K de R telles que*

$$R \subseteq R_{\nu_1} \cap R_{\nu_2}.$$

On dit que ν_1 et ν_2 sont linéairement comparables si et seulement si, il existe un entier $r \geq 1$, tel que pour tout élément non nul $x \in R$

$$\nu_1(x) \leqslant r\nu_2(x) \quad et \quad \nu_2(x) \leqslant r\nu_1(x).$$

Cette définition est équivalente à dire que les filtrations données par ν_1 et ν_2 sont linéairement équivalentes d'après la proposition 1.4.7.

Lemme 2.1.15 (Cf. [2]. Section 4)**.** *Soient ν_1, ν_2 deux valuations discrètes linéairement comparables sur R. Alors ν_1, ν_2 ont le même centre dans R.*

Lemme 2.1.16 (Cf. [2]. Proposition 4.13)**.** *Soit I un idéal d'un anneau Nœthérien R. Si toutes les valuations de Rees associées à I sont linéairement comparables deux-à-deux, alors $\sqrt{I}$ est un idéal premier.*

Théorème 2.1.17. *Soit R un anneau Nœthérien intègre et I un idéal de R qui vérifie la condition (Z_2). Soit $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$, alors on a les propriétés suivantes :*

(1) $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, en particulier, il est intégralement clos,

(2) La complétion $\mathfrak{p}$-adique de R est un anneau intègre,

(3) Les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique sont linéairement équivalentes.

Démonstration. Soit ν l'unique valuation de Rees associée à I et $b = b(I)$. Le lemme (2.1.16) montre que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier et

$$\mathfrak{p} = \{x \in R \mid \nu(x) \geqslant 1\}.$$

Par le Théorème 2.1.13 et sa preuve, R a un idéal 1-fibré normal de la forme $J = \overline{I^s}$, d'où $\sqrt{J} = \mathfrak{p}$. Soit $e = \nu(J)$, alors, d'après le théorème de valuations de Rees, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$I_{en}(\nu) = \overline{J^n} = J^n \subseteq \mathfrak{p}^n,$$

et comme $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$, il existe un entier positif l tel que $\mathfrak{p}^l \subset I$, donc

$$\mathfrak{p}^{ln} \subseteq I^n \subseteq I_n(\nu).$$

Par conséquent, les topologies $\mathfrak{p}$-adique et ν-adique sont linéairement équivalentes. Alors la complétion $\mathfrak{p}$-adique de R est un anneau intègre. Maintenant, il reste à montrer que les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique sont linéairement équivalentes. Pour tout entier n positif ou nul et pour tout élément x dans R, on a :

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{p}^{(2nl+bl)} &\Longrightarrow x \in \mathfrak{p}^{2nl+bl} R_{\mathfrak{p}} \cap R \\ &\Longrightarrow \exists s \notin \mathfrak{p} \ \text{ tel que } sx \in \mathfrak{p}^{2nl+bl} \\ &\Longrightarrow \exists s \notin \mathfrak{p} \ \text{ tel que } \ sx \in I^{2n+b} \\ &\Longrightarrow \exists s \notin \mathfrak{p} \ \text{ tel que } \ s \in I^n \ \text{ ou } x \in I^n. \end{aligned}$$

Si $s \in I^n$, alors $s \in \mathfrak{p}$, ce qui est une contradiction. Alors $x \in I^n$. Par conséquent,

$$\mathfrak{p}^{(2nl+bl)} \subseteq I^n \subseteq \mathfrak{p}^n.$$

Cela montre que les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique sont linéairement équivalentes. □

Corollaire 2.1.18. *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau intègre. Si R a un idéal $\mathfrak{m}$-primaire qui vérifie la condition (Z_2), alors R est analytiquement irréductible .*

Démonstration. Le corollaire découle directement du théorème 2.1.17. □

Le corollaire précédent est une généralisation du résultat suivant mentionné par J. Sally dans l'article [20].

Proposition 2.1.19 ([20], Page 439). *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local normal et analytiquement non-ramifié. Si R a un idéal 1-fibré, alors R est analytiquement irréductible.*

Théorème 2.1.20. *Soit I un idéal monomial de $R = k[x_1, x_2, ..., x_d]$ satisfaisant les conditions suivantes : $\forall x \in R$, $\forall y \in K(R)$, et pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :*

$$xy \in I^{2n} \Longrightarrow x \in I^n \quad ou \quad y \in I^n. \tag{2.1.3}$$

Alors I est normal.

Démonstration. Il est clair que si I satisfait la condition (2.1.3), alors I est 1-fibré avec $b(I) = 0$. Premièrement, nous allons montrer que I est un idéal intégralement clos.

Quand I est monomial, si $f \in \overline{I}$, alors il existe un entier n tel que $f^n \in I^n$. Par conséquent, pour montrer que I est intégralement clos, il suffit de montrer que pour tout $f \in k[x_1, x_2, ..., x_d]$ et pour tout entier n on trouve :

$$f^n \in I^n \Longrightarrow f \in I. \tag{2.1.4}$$

Sachant que la clôture intégrale d'un idéal monomial est un idéal monomial, on peut considérer dans l'implication (2.1.4) que f est un monôme. Nous procédons par récurrence sur n.

(i) Si $n = 1$, l'implication (2.1.4) est triviale.

(ii) Supposons que l'implication (2.1.4) est vraie pour tout $1 \leqslant n \leqslant r - 1$ et pour tout $f \in R$.

Soit f un monôme tel que $f^r \in I^r$, alors f^r peut être écrit comme suit :

$$f^r = \prod_{i=1}^{r} f_i,$$

où f_i est un mônome dans I, pour tout $i = 1, 2, ..., r$. Nous percevons deux cas :

(a) Si $r = 2s$, alors $f^{2s} \in I^{2s}$. Comme I satisfait la condition (2.1.3), $f^s \in I^s$. Utilisons l'hypothèse de récurrence, on obtient $f \in I$.

(b) Si $r = 2s + 1$, alors

$$\begin{aligned} f^r = \prod_{i=1}^{r} f_i \Longrightarrow f^{2s+1} &= \prod_{i=1}^{2s+1} f_i \\ &\Longrightarrow (f^{s+1}/f_1) f^s = \prod_{i=2}^{2s+1} f_i \\ &\Longrightarrow (f^{s+1}/f_1) f^s \in I^{2s} \\ &\Longrightarrow (f^{s+1}/f_1) \in I^s \quad \text{ou} \quad f^s \in I^s \\ &\Longrightarrow f^{s+1} \in I^{s+1} \quad \text{ou} \quad f^s \in I^s. \end{aligned}$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence, on obtient $f \in I$.

Alors l'idéal I est intégralement clos. Comme pour chaque entier n l'idéal I^n satisfait aussi la condition (2.1.3), nous pouvons montrer en utilisant la même preuve que I^n est intégralement clos. Par suite I est normal. □

2.2 Racine n-ième des idéaux 1-fibrés

Dans cette section nous allons introduire et étudier la notion de la racine n-ième d'un idéal , et nous allons montrer quelques résultats sur les idéaux qui ont la propriété (Z_2) avec $b(I) = 0$.

Définition 2.2.1. *Soit E un sous-ensemble d'un anneau R et $n \geqslant 1$ un entier. On appelle l'ensemble de tout les éléments $x \in R$ tel que $x^n \in E$ la racine n-ième de E dans R, et on note*

$$\sqrt[n]{E} = \{x \in R \text{ tel que } x^n \in E\}.$$

Proposition 2.2.2. *Soit E un sous-ensemble d'un anneau R . On a les propriétés suivantes :*

(1) $\sqrt[n]{\emptyset} = \emptyset$, $\sqrt[n]{R} = R$ *et* $\sqrt[1]{E} = E$.

(2) Pour tous entiers positifs n et m,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{E}} = \sqrt[mn]{E}.$$

(3) Si E_1, E_2 sont deux sous-ensembles de R, alors pour tout entier positif n,

$$\sqrt[n]{E_1 \cap E_2} = \sqrt[n]{E_1} \cap \sqrt[n]{E_2} \quad \text{et} \quad \sqrt[n]{E_1 \cup E_2} = \sqrt[n]{E_1} \cup \sqrt[n]{E_2}.$$

(4) Si $E_1 \subseteq E_2$ sont deux sous-ensembles de R, alors pour tout entier positif n,

$$\sqrt[n]{E_1} \subseteq \sqrt[n]{E_2}.$$

(5) En général, la n-ième racine d'un idéal n'est pas un idéal. Par exemple, si $I = (x^2, y^2) \subset \mathbb{C}[x, y]$, il est clair que $x \in \sqrt[2]{I}$, $y \in \sqrt[2]{I}$ et $x + y \notin \sqrt[2]{I}$.

(6) Soit I un idéal d'un anneau R. On a

(a) *La suite d'ensembles* $(\sqrt[n]{I})_n$ *est croissante dans le sens d'inclusion.*

(b) $\forall x \in R,\ x\sqrt[n]{I} \subseteq \sqrt[n]{I}$.

(c) $\sqrt{I} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{I}$.

(d) *Si R est un anneau de caractéristique* $p \geqslant 1$, *alors pour tout entier positif* n, $\sqrt[p^n]{I}$ *est un idéal.*

(e) *Si I est un idéal premier, alors pour tout entier positif* n, $\sqrt[n]{I} = I$.

Lemme 2.2.3. *Soit* $d \geqslant 1$ *un entier et* I *un idéal qui vérifie la condition* (Z_2) *avec* $b(I) = 0$. *Alors pour tout entier* $n \geqslant 1$, *pour tout* $x_1, x_2, \ldots, x_d$ *dans* $\sqrt[n]{I}$, *et pour tout* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ *dans* $\mathbb{N}$ *tels que* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = n$, *on a :*

$$\prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \in I.$$

Démonstration. Soit n un entier et $P(d)$ la propriété suivante : pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_d$ dans $\sqrt[n]{I}$, et pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = n$, on a :

$$\prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \in I.$$

Nous allons montrer, par récurrence sur d, que la propriété $P(d)$ est toujours vraie.

1. Si $d = 1$: il est clair que la proposition $P(1)$ est vraie.

2. Si $d = 2$: soit n un entier. Considérons x et y deux éléments de $\sqrt[n]{I}$, par définition x^n et y^n appartient à I. Nous allons montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $x^k y^{n-k} \in I$. Utilisons la récurrence sur k.

   (a) Si $k = 1$:

   Supposons le contraire (i.e. $xy^{n-1} \notin I$). On a

   $$(xy^{n-1})(yx^{n-1}) = x^n y^n \in I^2,$$

   alors $yx^{n-1} \in I$, parce que I est un idéal 1-fibré avec $b(I) = 0$. Multiplions par y^n, on a

   $$y^n(yx^{n-1}) = (xy^{n-1})(y^2x^{n-2}) \in I^2.$$

Ce qui donne $y^2x^{n-2} \in I$. De même, si on multiplie par y^n, on obtient

$$y^n(y^2x^{n-2}) = (xy^{n-1})(y^3x^{n-3}) \in I^2.$$

Alors $y^3x^{n-3} \in I$. Utilisons le même raisonnement chaque fois, on trouve que

$$(xy^{n-1})(xy^{n-1}) \in I^2,$$

et cela est une contradiction avec le fait que $xy^{n-1} \notin I$.

(b) L'étape de récurrence :

Par l'hypothèse de récurrence, on a $x^ky^{n-k} \in I$. Supposons que $x^{k+1}y^{n-k-1} \notin I$. Comme I est un idéal 1-fibré avec $b(I) = 0$ et

$$(x^{k+1}y^{n-k-1})(x^{n-k-1}y^{k+1}) = x^ny^n \in I^2,$$

on a $x^{n-k-1}y^{k+1} \in I$.

Multiplions par x^ky^{n-k}, on obtient

$$x^ky^{n-k}x^{n-k-1}y^{k+1} = (x^{k+1}y^{n-k-1})(x^{n-k-2}y^{k+2}) \in I^2.$$

Par conséquent, $x^{n-k-2}y^{k+2} \in I$. De même, multiplions par x^ky^{n-k}, on obtient $x^{n-k-3}y^{k+3} \in I$. En utilisant le raisonnement plusieurs fois, on trouve que

$$(x^{k+1}y^{n-k-1})(x^{k+1}y^{n-k-1}) \in I^2.$$

Cela est une contradiction avec le fait que $x^{k+1}y^{n-k-1} \notin I$.

Alors la propriété $P(2)$ est vraie.

3. Maintenant, supposons que $d \geq 3$ et la propriété $P(s)$ est vraie pour tout $2 \leqslant s \leqslant d-1$. Soient $x_1, x_2, \dots, x_d$ des éléments de $\sqrt[n]{I}$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ d entiers tel que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = n$. Nous allons montrer que

$$y = \prod_{i=1}^{d} x_i^{\alpha_i} \in I.$$

On peut supposer que $\alpha_i \neq 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, parce que si, par exemple $\alpha_1 = 0$, alors le fait que la propriété $P(d-1)$ est vraie implique que $y \in I$. Comme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = n$ et $d \geqslant 3$, on peut choisir $i, j \in \{1, 2, \ldots, d\}$, tel que $\alpha_i < \frac{n}{2}$ et $\alpha_j < \frac{n}{2}$. Pour simplifier la notation, on suppose que $\alpha_d < \frac{n}{2}$, $\alpha_{d-1} < \frac{n}{2}$ et $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{d-2}$. D'où

$$2\alpha_d + \sum_{i=1}^{d-2} 2\alpha_i = 2n - 2\alpha_{d-1} > n. \tag{2.2.1}$$

Nous allons trouver deux éléments spéciaux y_1, y_2 de I tel que

$$y^2 = \prod_{i=1}^{d} x_i^{2\alpha_i}$$

peut être écrite comme $y^2 = y_1 y_2$. Soit $\alpha_0 = 0$, $x_0^{\alpha_0} = 1$ et soit k le plus grand élément de $\{0, 1, 2, \ldots, d-2\}$ satisfaisant

$$2\alpha_d + \sum_{i=0}^{k} 2\alpha_i \leqslant n.$$

Par (2.2.1), on a $k \leqslant d - 3$.

Nous percevons deux cas :

– Cas 1 : $2\alpha_d + \sum_{i=0}^{k} 2\alpha_i = n$, nous prenons

$$y_1 = x_d^{2\alpha_d} \prod_{i=0}^{k} x_i^{2\alpha_i}$$

et

$$y_2 = \prod_{i=k+1}^{d-1} x_i^{2\alpha_i}.$$

– Cas 2 : $2\alpha_d + \sum_{i=0}^{k} 2\alpha_i < n$. Par définition de k, on a :

$$2\alpha_d + 2\alpha_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} 2\alpha_i > n.$$

Écrivons $2\alpha_{k+1}$ comme $2\alpha_{k+1} = \beta_1 + \beta_2$ tel que :

$$\beta_1 + 2\alpha_d + \sum_{i=1}^{k} 2\alpha_i = n.$$

nous prenons

$$y_1 = x_d^{2\alpha_d} x_{k+1}^{\beta_1} \prod_{i=0}^{k} x_i^{2\alpha_i}$$

et

$$y_2 = x_{k+1}^{\beta_2} \prod_{i=k+2}^{d-1} x_i^{2\alpha_i}.$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence et le fait que $k \leqslant d-3$, on peut en déduire, dans les deux cas, que y_1 et y_2 appartient à I, alors $y^2 \in I^2$. En conséquence, $y \in I$ parce que I est un idéal 1-fibré avec $b(I) = 0$.

□

Remarque 2.2.4. Avec les hypothèses du lemme précédent, si $n \geqslant 1$ est un entier tel que $x_1, x_2, \ldots, x_d$ appartient à $\sqrt[n]{I}$, alors

$$(x_1, x_2, \ldots, x_d)^n \subset I.$$

Corollaire 2.2.5. *Si I est un idéal qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sqrt[n]{I}$ est un idéal de R.*

Démonstration. Soient x et y deux éléments de $\sqrt[n]{I}$, par définition x^n et y^n appartient à I. Il est clair que pour tout $a \in R$, $ax \in \sqrt[n]{I}$. Utilisons le théorème de binôme et le lemme précédent, nous pouvons montrer que $x + y \in \sqrt[n]{I}$, alors $\sqrt[n]{I}$ est un idéal de R. □

Remarque 2.2.6. On rappelle que si I est un idéal qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$, alors toutes ses puissances I^n sont des idéaux 1-fibrés pour tout entier avec $b(I^n) = 0$. Donc pour tout entiers $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$, l'ensemble $\sqrt[n]{I^m}$ est un idéal de R. En particulier, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{I}}$ est un idéal, parce que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{I}} = \sqrt[nm]{I}.$$

Corollaire 2.2.7. *Si I, J sont deux idéaux d'un anneau R qui vérifient la condition (Z_2) tels que $b(I) = b(J) = 0$, alors pour tout entier $n \geqslant 0$, l'ensemble $\sqrt[n]{I \cap J}$ est un idéal de R.*

Démonstration. On sait que

$$\sqrt[n]{I \cap J} = \sqrt[n]{I} \cap \sqrt[n]{J},$$

D'après Corollaire (2.2.5), on obtient que $\sqrt[n]{I \cap J}$ est un idéal. □

Proposition 2.2.8. *Soit I un idéal d'un anneau R tel que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sqrt[n]{I^n}$ est un idéal de R. L'ensemble*

$$J(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{I^n}.$$

est un idéal de R satisfaisant les inclusions $I \subseteq J(I) \subseteq \overline{I}$.

Démonstration. Il est clair que pour tout $y \in R$ et pour tout $x \in J(I)$, $yx \in J(I)$. Soient x et y deux éléments de $J(I)$, alors il existe deux entiers n et m tel que $x^n \in I^n$ et $y^m \in I^m$. Il s'ensuit que, $x^{nm} \in I^{nm}$ et $y^{nm} \in I^{nm}$, cela montre que $x \in \sqrt[nm]{I^{nm}}$ et $y \in \sqrt[nm]{I^{nm}}$. Par hypothèse $\sqrt[nm]{I^{nm}}$ est un idéal de R, alors $(x+y)^{nm} \in I^{nm}$, qui prouve que $x + y \in J(I)$, alors $J(I)$ est un idéal de R. Les inclusions $I \subseteq J(I) \subseteq \overline{I}$ sont évidentes. □

Remarque 2.2.9. Si I est un idéal monomial, alors $J(I) = \overline{I}$.

Proposition 2.2.10. *Soit I un idéal qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$. On a les propriétés suivantes :*

(1) $\forall n \geqslant 0$, $\sqrt[2^n]{I^{2^n}} = I$.

(2) $\forall n \geqslant 1, \forall m \geqslant 1$, $\sqrt[2n]{I^{2m}} = \sqrt[n]{I^m}$.

Démonstration. Soit x un élément de R et n un entier positif. Comme I vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$, on a l'equivalence suivante :

$$\begin{aligned} x \in \sqrt[2^n]{I^{2^n}} &\Longleftrightarrow x^{2^n} \in I^{2^n} \\ &\Longleftrightarrow (x^{2^{n-1}})^2 \in I^{2(2^{n-1})} \\ &\Longleftrightarrow x^{2^{n-1}} \in I^{2^{n-1}} \\ &\vdots \\ &\Longleftrightarrow x^2 \in I^2 \\ &\Longleftrightarrow x \in I. \end{aligned}$$

Alors

$$\sqrt[2^n]{I^{2^n}} = I.$$

Soit m un entier positif, on a

$$\begin{aligned} x \in \sqrt[2n]{I^{2m}} &\Longleftrightarrow x^{2n} \in I^{2m} \\ &\Longleftrightarrow (x^n)^2 \in I^{2m} \\ &\Longleftrightarrow x^n \in I^m \\ &\Longleftrightarrow x \in \sqrt[n]{I^m}. \end{aligned}$$

Alors $\sqrt[2n]{I^{2m}} = \sqrt[n]{I^m}$. □

Proposition 2.2.11. *Soit I un idéal d'un anneau R. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $\exists k \geqslant 2$ tel que $\sqrt[k]{I} = I$.

(2) $\forall n \geqslant 2$, on a $\sqrt[n]{I} = I$.

(3) L'idéal I est radical (i.e. $\sqrt{I} = I$).

Démonstration. Les implications $(3) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (1)$ sont triviales. Nous allons montrer que $(1) \Longrightarrow (3)$. Soit $x \in \sqrt{I}$, alors il existe $n \geqslant 1$ tel que $x^n \in I$. Soit $s \geqslant 1$ un entier tel que $k^s \geqslant n$, par conséquent, $x^{k^s} \in I$, alors $x^{k^{s-1}} \in \sqrt[k]{I}$. Utilisons la condition (1), on trouve

$$x^{k^{s-1}} \in I.$$

Par récurrence, nous montrons aussi que

$$x^{k^{s-2}} \in I, \ldots, x^k \in I.$$

Cela montre que $x \in I$, parce que $\sqrt[k]{I} = I$. $\square$

Chapitre

3 Normalité des idéaux monômiaux 1-fibrés

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est de présenter un nouveau critère pour tester si un idéal monomial 1-fibré est normal ou non. Précisément, nous allons montrer que, si I est un idéal monomial de $R = k[x_1, x_2, ..., x_d]$, alors I est 1-fibré normal si et seulement si pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{2n}$, x ou y appartient à I^n.

3.1 Clôture intégrale des idéaux 1-fibrés

Tout au long de cette section, R désigne un anneau Nœthérien et I est l'un de ses idéaux. Nous rappelons que si n est un entier positif, la racine n-ième de I, $\sqrt[n]{I}$, est l'ensemble des éléments x de R tel que x^n appartient à I.

Lemme 3.1.1. *Soit I un idéal d'un anneau Nœthérien R qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$. Alors pour tout entier positif n,*

$$\sqrt[n]{I^n} \quad \subseteq \quad I^2 : I.$$

Démonstration. Pour tout entier positif $n \geq 1$, soit $P(n)$ la propriété suivante :

$$P(n): \qquad \forall y \in I, \forall x \in R: \quad x^n y \in I^{n+1} \Longrightarrow xy \in I^2.$$

Pour montrer ce lemme, nous devons montrer que : la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$. On utilise la démonstration par récurrence :

1. Évidemment, la propriété $P(1)$ est vraie.
2. Supposons que la propriété $P(s)$ est vraie pour tout entier s tel que $1 \leq s \leq n-1$. Soient x, y deux éléments dans R tel que $y \in I$ et $x^n y \in I^{n+1}$. Nous percevons deux cas :

i) Si $n = 2k$, alors

$$(x^k y)^2 = (x^{2k} y) y \in I^{2k+2}.$$

Comme I vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$, on obtient $x^k y \in I^{k+1}$. Alors $xy \in I^2$ parce que la propriété $P(k)$ est vraie.

ii) Si $n = 2k+1$, alors

$$x^{2k+1} y = x^{k+1}(x^k y) \in I^{2k+2}.$$

Comme I est un idéal qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$, on obtient

$$x^{k+1} \in I^{k+1}$$

ou

$$x^k y \in I^{k+1}.$$

Alors $xy \in I^2$ parce que les propriétés $P(k)$ et $P(k+1)$ sont vraies.

Par conséquent

$$\sqrt[n]{I^n} \quad \subseteq \quad I^2 : I,$$

pour tout entier $n \geq 1$. □

Lemme 3.1.2. *Soit I un idéal d'un anneau intègre Nœthérien R qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$. Alors pour tout entier $n \geq 1$*

$$I^{n+1} : I \quad \subseteq \quad \overline{I^n}.$$

Démonstration. Soit x un élément dans R, tel que

$$x \in (I^{n+1} : I).$$

Alors pour tout élément $y \in I$, $xy \in I^{n+1}$. Prenons $y \in I$, tel que $\overline{v}_I(y) = 1$, nous obtenons

$$\overline{v}_I(xy) = 1 + \overline{v}_I(x) \geq n + 1.$$

Alors

$$\overline{v}_I(x) \geq n,$$

et par le Théorème de Rees, on obtient $x \in \overline{I^n}$. Par conséquent,

$$I^{n+1} : I \quad \subseteq \quad \overline{I^n}.$$

□

3.2 Critère de normalité des idéaux 1-fibrés monômiaux

Dans cette partie nous allons montrer que, si I est un idéal monomial 1-fibré, alors I est normal si et seulement si $b(I) = 0$. Ce résultat donne une réponse affirmative à une question de Hübl et Swanson posée dans [9].

Proposition 3.2.1. *Si I est un idéal normal 1-fibré d'un anneau Nœthérien R, alors pour tout entier $n \geq 0, m \geq 0$, pour tout $x \in I^n$, $y \in I^m$ et pour tout entier positif k, tel que $xy \in I^{2k+n+m}$, on a $x \in I^{n+k}$ ou $y \in I^{m+k}$.*

Démonstration. Soient $x \in I^n$ et $y \in I^m$ tels que $xy \in I^{2k+n+m}$. Si $x \notin I^{n+k}$ et $y \notin I^{m+k}$, alors puisque I est normal, on obtient en utilisant le Théorème de Rees (Cf. Théorème 1.3.8),

$$\overline{v}_I(x) < n + k$$

et

$$\overline{v}_I(y) < m + k.$$

Sachant que l'idéal I est 1-fibré, la fonction $\overline{v}_I(x)$ est une valuation [Cf. Théorème 2.1.5)], par suite

$$\overline{v}_I(xy) = \overline{v}_I(x) + \overline{v}_I(y) < 2k + n + m$$

D'où

$$xy \notin \overline{I^{2k+n+m}} = I^{2k+n+m}.$$

C'est une contradiction. □

Corollaire 3.2.2 ([9], Corollaire 2.7)**.** *Soit I un idéal normal 1-fibré d'un anneau Nœthérien R. Alors $b(I) = 0$ (i.e. pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{2n}$, x ou y appartient à I^n).*

Lemme 3.2.3. *Soit I un idéal d'un anneau Nœthérien qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$. Alors pour tout entier positif r et pour tout n,*

$$\sqrt[n]{I^{rn}} \quad \subseteq \quad I^{r+1} : I.$$

Démonstration. Nous allons montrer ce lemme par récurrence sur r. Soit $Q(r)$ la propriété suivante : pour tout idéal 1-fibré I de R tel que $b(I) = 0$, on a

$$\sqrt[n]{I^{rn}} \quad \subseteq \quad I^{r+1} : I \quad \text{pour tout entier} \quad n \geq 1.$$

– Si $r = 1$, par le lemme 3.1.1, on sait que,

$$\sqrt[n]{I^{n}} \quad \subseteq \quad I^{2} : I \quad \text{pour tout entier} \quad n \geq 1.$$

Alors $Q(1)$ est vraie.

– Soit $r \geq 2$ un entier et supposons que $Q(m)$ est vraie pour tout $m \in \{1, 2, ..., r - 1\}$. Soit I un idéal 1-fibré tel que $b(I) = 0$, n un entier positif et x un élément de R tel que $x^n \in I^{rn}$. Soit s (resp. t) le plus petit entier supérieur ou égal à $\ln_2(n)$ (resp. $\ln_2(r) - 1$). Cela signifie que

$$2^{s-1} < n \leq 2^s$$

et

$$2^t < r \leq 2^{t+1}.$$

On a $x^n \in I^{rn} \Longrightarrow (x^{2^t})^n \in (I^r)^{2^t n}$. Comme la propriété $Q(2^t)$ est vraie, on obtient $x^{2^t} y^r \in I^{r2^t + r}$ pour tout $y \in I$. Remarquons que

$$\begin{aligned} r \leq 2^{t+1} &\Longleftrightarrow 2(r - 2^t) \leq r \\ &\Longleftrightarrow 2^s(r - 2^t) \leq r2^{s-1} \\ &\Longrightarrow 2^s(r - 2^t) \leq rn. \end{aligned}$$

Alors, nous pouvons écrire :

$$(xy)^{2^{s+t}} = x^{2^t n} \, (x^{2^t} y^r)^{2^s - n} \, y^{rn - 2^s(r - 2^t)}.$$

Par conséquent

$$(xy)^{2^{s+t}} \in I^{rn2^t+(2^s-n)(r2^t+r)+rn-2^s(r-2^t)} = I^{(r+1)2^{s+t}}.$$

Comme I est 1-fibré avec $b(I) = 0$, on obtient $xy \in I^{r+1}$. D'où

$$\sqrt[n]{I^{rn}} \quad \subseteq \quad I^{r+1} : I.$$

Cela montre que la propriété $Q(r)$ est vraie.

□

Proposition 3.2.4. *Soit I un idéal monomial 1-fibré tel que $b(I) = 0$. Alors pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\overline{I^n} \quad = \quad I^{n+1} : I.$$

Démonstration. Puisque que I est un idéal monomial, un élément x appartient à la clôture intégrale de I^n si et seulement s'il existe un entier positif r tel que $x^r \in I^{rn}$. Cela signifie

$$\overline{I^n} \quad = \quad \bigcup_{r=1}^{\infty} \sqrt[r]{I^{rn}}.$$

Utilisons le lemme 3.1.2 et le lemme 3.2.3, on obtient le résultat. □

Nous avons besoin des lemmes suivants pour montrer le résultat principal.

Lemme 3.2.5 ([13], Lemme 1.1 (b))**.** *Soit I un idéal d'un anneau Nœthérien. Alors il existe un entier $l \geq 0$ tel que, pour tout entier $n \geq l$,*

$$(I^{n+1} : I) \cap I^l \quad = \quad I^n.$$

Lemme 3.2.6 ([9])**.** *Soit I un idéal d'un anneau Nœthérien R qui vérifie la condition (Z_2) avec $b(I) = 0$. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que I^n est intégralement clos pour tout $n \geq r$, alors I est normal.*

Démonstration. Soit s un entier et x un élément arbitraire de $\overline{I^s}$. Prenons k un entier tel que $s2^k \geq r$. Alors I^{s2^k} est intégralement clos.

$$\begin{aligned} x \in \overline{I^s} &\Longrightarrow \overline{v}_I(x) \geq s \\ &\Longrightarrow \overline{v}_I(x^{2^k}) \geq s2^k \\ &\Longrightarrow x^{2^k} \in \overline{I^{s2^k}} = I^{s2^k}. \end{aligned}$$

Comme $b(I) = 0$, on obtient

$$x^{2^k} \in I^{s2^k}, x^{2^{k-1}} \in I^{s2^{k-1}}, \cdots, x \in I^s.$$

Par conséquent, pour tout entier $s \geq 1$, l'idéal I^s est intégralement clos. Alors I est normal. $\square$

Théorème 3.2.7. *Soit I un idéal monomial de $R = k[x_1, x_2, ..., x_d]$. Alors I est un idéal 1-fibré normal si et seulement si pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{2n}$, $x \in I^n$ ou $y \in I^n$.*

Démonstration. Soit I un idéal monomial. Premièrement, supposons que pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{2n}$, x ou y appartient à I^n. Alors I satisfait la condition (Z_2) et par ([2], Théorème 4.7), on obtient que I est 1-fibré. Maintenant, nous allons montrer que I est normal. Par le lemme 3.2.5, il existe un entier $l \geq 0$ tel que, pour tout entier $n \geq l$,

$$(I^{n+1} : I) \cap I^l \quad = \quad I^n. \tag{3.2.1}$$

Soit $z \in I$ un élément non nul. Il est facile de montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$I^{n+1} \cap (z) \quad = \quad z(I^{n+1} : z). \tag{3.2.2}$$

D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe $s \geq 1$, tel que pour tout entier $n \geq s$,

$$I^{n+1} \cap (z) \quad = \quad I^{n+1-s}(I^s \cap (z)) \quad \subseteq \quad zI^{n+1-s}.$$

Donc, l'égalité (3.2.2) donne que, pour tout entier $n \geq s$,

$$z(I^{n+1} : z) \quad \subseteq \quad zI^{n+1-s}. \tag{3.2.3}$$

Sachant que $z \neq 0$, on trouve

$$(I^{n+1} : I) \quad \subseteq \quad (I^{n+1} : z) \quad \subseteq \quad I^{n+1-s}. \tag{3.2.4}$$

D'où pour tout entier $n \geq s + l$,

$$(I^{n+1} : I) \quad \subseteq \quad I^l. \tag{3.2.5}$$

Utilisons (3.2.1) et (3.2.5), on obtient pour tout entier $n \geq s + l$,

$$(I^{n+1} : I) \quad = \quad I^n. \tag{3.2.6}$$

En appliquant maintenant la Proposition 3.2.4, on déduit $\overline{I^n} = I^n$ pour tout entier $n \geq s + l$. Par suite, la normalité de I devient une conséquence directe du lemme 3.2.6.

Réciproquement, si I est normal 1-fibré, alors le Corollaire 3.2.2 montre que pour tout entier positif n et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{2n}$, $x \in I^n$ ou $y \in I^n$. $\square$

Chapitre

4 Idéaux vérifiant la condition C_n

Sommaire

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la condition C_n et les idéaux C_n-maximaux (Cf. Définition 4.1.1 et Définition 4.2.1). Ensuite nous allons donner divers résultats concernant cette condition. A la fin nous montrons que tout idéal qui vérifie la condition C_n est contenu dans un idéal C_n-maximal (Cf. Théorème 4.2.2).

4.1 Condition C_n

Définition 4.1.1. *Soient I un idéal d'un anneau R et $n \geq 1$ un entier. On dit que I vérifie la condition (C_n) si pour tout entier $s \geq 1$ et pour tout x, y dans R tel que $xy \in I^{sn}$, x ou y appartient à I^s.*

Remarque 4.1.2. (1) $C_n \implies C_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$.

(2) Si I satisfait la condition C_n pour un entier n, alors toutes ses puissances satisfont également la condition C_n.

(3) La condition C_1 signifie que l'idéal I^n est premier pour tout entier $n \geq 1$. Si I est un idéal finiment engendré d'un anneau R qui n'est pas intègre, alors I ne possède jamais la condition (C_1). En effet, si on suppose en particulier que I^2 est premier, on obtient que $I^2 = I$, (remarquons que $x \in I \implies x^2 \in I^2 \implies x \in I^2$, car I^2 est premier). Donc d'après le lemme de Nakayama, on trouve que $I = (0)$ et ceci entraine une contradiction avec le fait que R n'est pas intègre.

(4) Interprétation géométrique de la condition C_2 pour les idéaux monomiaux : Soient $X = \operatorname{Spec} K[x_1, \cdots, x_d]$ et I un idéal $(x_1, \cdots, x_d)$-primaire monomial de R. Soit $\pi : X_I \longrightarrow X$ l'éclatement de X le long de I. L'idéal I satisfait la condition C_2 si et seulement si X_I est normal et le diviseur exceptionnel $E_I = V(IO_{X_I})$ est irréductible. Rappelons que la condition (C_2) est équivalente à la condition (Z_2) avec $b = 0$.

Exemple 4.1.3. (1) L'idéal R possède la condition C_n pour tout entier $n \geq 1$.

(2) L'idéal (0) d'un anneau intègre R possède la condition C_n pour tout entier $n \geq 1$.

(3) Si $(R, \mathfrak{m})$ est un anneau local régulier, alors son idéal maximal $\mathfrak{m}$ satisfait la condition C_n pour tout entier $n \geq 2$.

Proposition 4.1.4. *Soit R un anneau et soit S un sous ensemble multiplicativement fermé de*

R. Si I est un idéal de R qui satisfait la condition (C_n), alors l'idéal IR_S satisfait aussi cette condition.

Démonstration. Soient s un entier et x, y deux éléments dans R_S, tels que

$$xy \in (IR_S)^{sn} = I^{sn}R_S.$$

Soient $x = a/z_1$ et $y = b/z_2$ où $a, b \in R$ et $z_1, z_2 \in S$. Si $xy \in I^{sn}R_S$, alors ils existent $c \in I^{sn}$ et $z'_1 \in S$ tels que

$$\frac{ab}{z_1z_2} = \frac{c}{z'_1}.$$

Par conséquent, il existe $z'_2 \in S$ tel que

$$(z'_2a)(z'_1b) = z'_2z_1z_2c \in I^{sn}.$$

Comme I satisfait la condition (C_n), on obtient $z'_2a \in I^s$ ou $z'_1b \in I^s$. Donc

$$x = \frac{a}{z_1} = \frac{z'_2a}{z'_2z_1} \in I^sR_S \quad ou \quad y = \frac{b}{z_2} = \frac{z'_1b}{z'_1z_2} \in I^sR_S.$$

Cela montre que IR_S satisfait encore la condition (C_n). □

Proposition 4.1.5. *Soit I un idéal d'un anneau R et soit S un sous ensemble multiplicativement fermé de R. Si IR_S satisfait la condition (C_n), alors l'idéal $IR_S \cap R$ satisfait aussi cette condition.*

Démonstration. Supposons que IR_S satisfait la condition (C_n). Soient x, y deux éléments de R et $s \geq 1$ un entier tel que $xy \in (IR_S \cap R)^{sn}$. Donc

$$xy \in (IR_S)^{sn}.$$

Sachant que IR_S satisfait la condition (C_n), on obtient $x \in (IR_S)^s$ ou $y \in (IR_S)^s$. Par suite $x \in (IR_S \cap R)^s$ ou $y \in (IR_S \cap R)^s$. □

Proposition 4.1.6. *Si I est un idéal qui vérifie la condition (C_n) pour certain entier n, alors son radical $p =: \sqrt{I}$ est premier.*

Démonstration. Soient x et y deux éléments dans R. On suppose que $xy \in \sqrt{I}$. Alors $(xy)^s \in I$ pour certain entier $s \geq 1$, alors $x^{sn}y^{sn} \in I^n$. Comme I vérifie la condition (C_n), on obtient $x^{sn} \in I$ ou $y^{sn} \in I$, cela signifie que $x \in \sqrt{I}$ ou $y \in \sqrt{I}$. D'où $\sqrt{I}$ est un idéal premier. □

Proposition 4.1.7. *Si I est un idéal qui vérifie la condition (C_n), alors pour tout entier $s \geq 1$ et pour tous les idéaux J et K de R, l'inclusion $JK \subseteq I^{sn}$ implique que $J \subseteq I^s$ ou $K \subseteq I^s$.*

Démonstration. Soient J et K deux idéaux de R tels que $JK \subseteq I^{sn}$. On suppose que $J \nsubseteq I^s$ et $K \nsubseteq I^s$, alors ils existent $x \in J \setminus I^s$ et $y \in K \setminus I^s$. D'où $xy \in JK$, donc $xy \in I^{sn}$. Comme I vérifie la condition (C_n), on obtient $x \in I^s$ ou $y \in I^s$. Cela est une contradiction, donc $J \subseteq I^s$ ou $K \subseteq I^s$. □

Proposition 4.1.8. *Soit I un idéal $\mathfrak{p}$- primaire d'un anneau R tel que I^n est également $\mathfrak{p}$-primaire pour tout $n \geqslant 2$ (ceci est possible par exemple si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal). Alors $IR_{\mathfrak{p}}$ satisfait la condition (C_n) si et seulement si I satisfait aussi la condition (C_n).*

Démonstration. Par la Proposition 4.1.4, il est clair que si I vérifie la condition (C_n), alors $IR_{\mathfrak{p}}$ vérifie aussi cette condition. Inversement, on suppose que $IR_{\mathfrak{p}}$ vérifie la condition (C_n). Soient x et y deux éléments dans R et soit $s \geq 1$ un entier tel que $xy \in I^{sn}$. Alors $xy \in I^{sn}R_{\mathfrak{p}}$. Comme IR_p vérifie la condition (C_n), on obtient $x \in I^sR_{\mathfrak{p}} \cap R$ ou $y \in I^sR_{\mathfrak{p}} \cap R$. Par Nagata [15, (6.6), (b)], on obtient $I^sR_{\mathfrak{p}} \cap R = I^s$ parce que I^s est $\mathfrak{p}$-primaire. Par conséquent x ou y appartient à I^s. □

Proposition 4.1.9. *Si I est un idéal de type fini d'un anneau R et satisfait la condition (C_n), alors les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique sont linéairement équivalentes, quand $\mathfrak{p} = \sqrt{I}$.*

Démonstration. Comme I est un idéal de type fini, il existe un entier positif l tel que $\mathfrak{p}^l \subset I$. Soit $s \geq 0$ et x un élément dans R, si $x \in \mathfrak{p}^{(snl)} = \mathfrak{p}^{snl}R_{\mathfrak{p}} \cap R$, alors $tx \in \mathfrak{p}^{snl} \subseteq I^{sn}$ pour certain $t \in R \setminus \mathfrak{p}$. Comme I vérifie la condition (C_n), on obtient

$t \in I^s$ ou $x \in I^s$. Mais si $t \in I^s$, alors $t \in \mathfrak{p}$, ceci est une contradiction, donc $x \in I^s$. Par conséquent, pour tout entier s, $\mathfrak{p}^{(snl)} \subseteq I^s \subseteq \mathfrak{p}^s$. Cela signifie que les topologies $\mathfrak{p}$-adique et $\mathfrak{p}$-symbolique sont linéairement équivalentes. □

Proposition 4.1.10. *Si S est une extension de R fidèlement plate et I un idéal de R tel que IS vérifie la condition (C_n), alors I vérifie aussi cette condition.*

Démonstration. Soient x et y deux éléments dans R tel que $xy \in I^{sn}$, alors

$$xy \in I^{sn}S = (IS)^{sn}.$$

Comme IS satisfait la condition (C_n), on obtient $x \in I^sS \cap R$ ou $y \in I^sS \cap R$, par conséquent $x \in I^s$ ou $y \in I^s$ parce que $I^sS \cap R = I^s$ car S est fidèlement plate sur R. □

Nous nous intéressons maintenant à étudier la relation entre les idéaux 1-fibrés et les idéaux de valuations. Un idéal I d'un anneau intègre R est appelé idéal de valuation, s'il existe un anneau de valuation R_ν contenant R et un idéal J de R_ν tel que $J \cap R = I$. Si ν est la valuation associée à R_ν, on dit que I est un ν-idéal. Par définition si I est un ν-idéal et $e = \nu(I)$, alors

$$I = \{x \in R \mid \nu(x) \geqslant e\}.$$

Lemme 4.1.11. *Soit ν une valuation sur un anneau intégre R, et I un ν-idéal de R tel que pour tout entier $n \geq 1$, I^n est un ν-idéal. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *I vérifie la condition C_2.*

(2) *Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout élément $x \in R$ tel que $x^2 \in I^{2n}$, on a $x \in I^n$.*

Démonstration. L'implication (1)$\Longrightarrow$ (2) est triviale. Réciproquement, soit R_ν un anneau de valuation contenant R et J un idéal de cet anneau tel que $I = J \cap R$. Considérons $x, y \in R$ tel que $xy \in I^{2n}$. On a :

$$\begin{aligned} \nu(x^2) + \nu(y^2) = 2\nu(xy) &\implies \nu(x^2) \geqslant \nu(xy) \quad \text{ou} \quad \nu(y^2) \geqslant \nu(xy) \\ &\implies x^2 \in J^{2n} \cap R \quad \text{ou} \quad y^2 \in J^{2n} \cap R \\ &\implies x^2 \in I^{2n} \quad \text{ou} \quad y^2 \in I^{2n}. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on obtient $x \in I^n$ ou $y \in I^n$. Alors I est un idéal fortement 1-fibré. □

Proposition 4.1.12. *Soit ν une valuation sur un anneau intègre R. Si I est un idéal de R tel que pour tout entier $n \geqslant 1$ l'idéal I^n est ν-idéal, alors I est un idéal 1-fibré normal.*

Démonstration. Sachant que tout idéal d'une valuation est un idéal intégralement clos, on obtient la normalité de I. Maintenant, nous allons prouver que I est 1-fibré. Soit n un entier et x un élément de R vérifiant $x^2 \in I^{2n}$. Comme I^n est un ν-idéal, il existe un idéal J de R_ν pour lequel $I^n = J \cap R$. Supposons que $x \notin I^n$, alors $x \notin J$. Par suite, $\forall y \in J$, $\nu(y) > \nu(x)$. Nous en déduisons que $\forall y \in J^2$, $\nu(y) > \nu(x^2)$, donc $x^2 \notin J^2$. Par conséquence, $x^2 \notin I^{2n}$ parce que $I^{2n} \subseteq J^2 \cap R$. Ceci est une contradiction. Alors pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in R$ tel que $x^2 \in I^{2n}$, on a $x \in I^n$, et par le lemme 4.1.11, on obtient le résultat. □

Remarque 4.1.13. La réciproque de la proposition précédente 4.1.12 est aussi vraie, cela signifie que, si I est un idéal 1-fibré normal , alors pour tout entier $n \geqslant 1$, I^n est $\overline{\nu}_I$-ideal.

L'exemple suivant montre qu'il existe des idéaux de valuation qui ne sont pas 1-fibrés :

Exemple 4.1.14. Soit $R = k[u, v]_{(u,v)}$ l'anneau de polynômes sur un corps k. L'idéal

$$I = (u, v)(u, v^2) = (u^2, uv, v^3)$$

est un idéal de valuation, mais I n'est pas un idéal 1-fibré.

Proposition 4.1.15. *Soient ν une valuation discrète sur un anneau intègre R et I un ν-idéal de R. Alors pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, l'ensemble*

$$\sqrt[n]{I} = \{x \in R \mid x^n \in I\}$$

est un idéal de R.

Démonstration. Soient x, y deux éléments de $\sqrt[n]{I}$ et a un élément de R, donc $x^n \in I$ et $y^n \in I$. Il est clair que $(ax)^n = a^n x^n \in I$, donc $ax \in \sqrt[n]{I}$. Supposons que $\nu(x) \geqslant \nu(y)$, alors pour tout entier naturel $0 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} \nu(x^k y^{n-k}) &= k\nu(x) + (n-k)\nu(y) \\ &\geqslant k\nu(y) + (n-k)\nu(y) \\ &\geqslant \nu(y^n). \end{aligned}$$

Soit $e = \nu(I)$, donc $I = \{x \in R \mid \nu(x) \geqslant e\}$. Comme $y^n \in I$, alors $\nu(y^n) \geqslant e$. Ce qui donne $\nu(x^k y^n - k) \geqslant e$ car $\nu(x^k y^n - k) \geqslant \nu(y^n)$. Cela entraîne $x^k y^{n-k} \in I$ et par conséquent

$$(x+y)^n = \Big(\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} \Big) \in I.$$

Donc $x + y \in \sqrt[n]{I}$. $\square$

Remarque 4.1.16. Le corollaire 2.2.5 et la proposition 4.1.15 donnent des cas particuliers pour lesquels la racine n-ième d'un idéal est un idéal.

4.2 Idéaux C_n-maximaux

Définition 4.2.1. *Soit I un idéal propre d'un anneau R qui vérifie la condition C_n. On dit que I est C_n-maximal s'il n'y a pas d'idéaux vérifiant la condition C_n entre I et R. En d'autres termes, si J est un idéal qui vérifie la condition C_n tel que $I \subset J$, alors $J = I$ ou $J = R$.*

Théorème 4.2.2. *Soit I un idéal qui vérifie la condition C_n d'un anneau R. Alors I est contenu dans un idéal C_n-maximal de R.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de tout les idéaux propres de R vérifiant la condition (C_n). Soit

$$\mathcal{P}(I) = \{J \in \mathcal{S} : \quad I \subseteq J\}.$$

Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(I)$ satisfait la condition du lemme de Zorn. Comme l'idéal I vérifie la condition (C_n), on obtient $\mathcal{P}(I) \neq \emptyset$. Considérons un sous-ensemble $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $P(I)$ totalement ordonné par inclusion. Soit

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$$

Pour tout $\alpha \in \Lambda$, $I_\alpha \subseteq \mathfrak{m}$. Cela signifie que, $\mathfrak{m}$ est une borne supérieure pour $\mathcal{P}(I)$. Il est clair que $\mathfrak{m}$ est un idéal propre de R. Pour vérifier les hypothèses du Lemme de Zorn, nous devons vérifier que $\mathfrak{m}$ vérifie la condition (C_n). Soient x et y deux éléments dans R tel que $xy \in \mathfrak{m}^{sn}$, alors on peut écrire xy comme

$$xy = \sum_{i=1}^{l} (\prod_{j=1}^{sn} x_{ij})$$

où $x_{ij} \in \mathfrak{m}$. Par conséquent, pour tout $1 \leq i \leq l$ et $1 \leq j \leq sn$, il existe $\alpha_{ij} \in \Lambda$ tel que $x_{ij} \in I_{\alpha_{ij}}$.

Comme l'ensemble $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ est totalement ordonné, il existe $\alpha \in \Lambda$ tel que $x_{ij} \in I_\alpha$ pour tout $1 \leq i \leq l$, et $1 \leq j \leq sn$. Donc $xy \in I_\alpha^{sn}$ et comme I_α satisfait la condition C_n, on obtient $x \in I_\alpha^s$ ou $y \in I_\alpha^s$.

Par conséquent, x ou y appartient à $\mathfrak{m}^s$. □

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to commutative Algebra*. Addison-Wesley. 1969.

[2] C. Beddani. Clôture intégrale des idéaux et la propriété (Z_k). *Comm. in Algebra*, 37 :4079–4094, 2009.

[3] C. Beddani and W. Messirdi. On the normality of 1-fibered monomial ideals. *Acceptée dans Algebra Colloquium*.

[4] C. Beddani and W. Messirdi. Some results on one-fibered ideals. *Journal of Algebra and its Applications*, 12(03), 2013.

[5] S. D. Cutkosky. On unique and almost unique factorization of complete ideals II. *Invent. Math.*, 98 :59–79, 1989.

[6] D. Delfino and I. Swanson. Integral closure of ideals in excellent local rings. *J. Algebra*, 274(1) :422–428, 2004.

[7] R. Fedder, C. Huneke and R. Hübl. Zeros of differentials along one-fibered ideals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 108, 1990.

[8] H. Göhner. Semifactoriality and Muhly's condition (N) in two dimensional local rings. *J. Algebra*, 34 :403–429, 1975.

[9] R. Hübl and I. Swanson. Discrete valuations centered on local domains. *J. Pure Appl. Algebra*, 161(1-2) :145–166, 2001.

[10] D. Katz. On the number of minimal prime ideals in the completion of a local ring. *Rocky Mountain J. Math.*, 16 :575–578, 1986.

[11] M. Lejeune-Jalabert et B. Teissier. Clôture intégrale des idéaux et équisingularité. *Séminaire. Ecole Polytechnique*, 1974.

[12] H. Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[13] S. McAdam. *Asymptotic prime divisors*. Lecture Notes in Math. 1023. Springer-Berlin, 1983.

[14] W. Messirdi. A propos de la condition c_n. *En preparation*.

[15] M. Nagata. *Local rings*. Interscience Publishers. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, 1962.

[16] D. Rees. Valuations associated with a local ring (I). *J. London Math. Soc.*, 5 :108–128, 1955.

[17] D. Rees. Valuations associated with ideals. II. *J. London Math. Soc.*, 31 :221–228, 1956.

[18] D. Rees. A note on analytically unramified local rings. *J. London Math. Soc.*, 36 :24–28, 1961.

[19] D. Rees. Izumi's theorem. In *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987)*, volume 15 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 407–416. Springer, New York, 1989.

[20] J. D. Sally. One-fibered ideals. *Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987) Math. Sci. Res. Inst. Publ., 15, Springer, New York.*

[21] P. Samuel. Some asymptotic properties of powers of ideals. *Ann. Math.*, 56, 1952.

[22] I. Swanson and C. Huneke. *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*. Lecture Notes Serie 336. London Mathematical Society, 2006.

[23] V. Van Lierde. One-fibered ideals in 2-dimensional rational singularities that can be desingularized by blowing up the unique maximal ideal. *Central European Journal of Mathematics*, 9, 2011.

[24] M. Vaquié. Valuations. *dans Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), Progr. Math. 181*, 2000.

[25] O. Zariski and P. Samuel. *Commutative algebra. Vol. II*, volume 29 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1975.

Notations

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers strictement positifs
$\mathbb{R}$	Ensembles des réels
$\mathbb{R}_+$	Ensembles des réels positifs
$\mathbb{R}^d$	Ensemble des vecteurs réels à d dimensions
$\operatorname{ht} I$	Hauteur d'un ideal I
$\operatorname{Spec} R$	Spectrum de R
$\overline{I}$	Clôture intégrale de l'idéal I
$\mathcal{R}(I)$	Algèbre de Rees
$\overline{R}$	Normalisation de l'anneau R
ν_I	Ordre I-adique
$\overline{\nu}_I$	Ordre I-adique réduit
$\widehat{R}$	Completion m-adique
$\mathfrak{p}^{(n)}$	Puissance nième symbolique
$\sqrt[n]{I}$	Racine nième de l'idéal I

Index